1. Výroky a operace s nimi

1. Účast Aleny, Báry, Cyrila a Davida na koncertě skupiny PINK FLOYD je vázána těmito podmínkami: Přijde aspoň jeden chlapec, nejvýše jedna dívka a právě jeden ze sourozenců Alena, Cyril. Bára nepřijde bez Davida, přitom je však vyloučeno, aby přišla Alena spolu s Davidem. Které skupiny z této čtveřice se mohou zúčastnit a kdo na koncert určitě půjde?

2. Petr a Martin čekají před kinem na své kamarády Ondru, Matěje a Davida. Petr tvrdí: „Přijde-li Ondra a Matěj, přijde i David.“ Martin říká: „Já si myslím, že když přijde Ondra a nepřijde David, nepřijde ani Matěj.“ Na to Petr odvětí: „To ovšem říkáš totéž co já.“ Rozhodněte, zda oba skutečně říkají totéž.

3. Některý z žáků A, B, C rozbil okno. Je zjištěno, že v té době nebyl u okna žák A nebo u něho nebyl žák B. Když B nebyl u okna, nebyl tam ani A. Žák C nebyl u okna právě tehdy, když u něho nebyl žák A. Určete pachatele, víte-li, že byl právě jeden.

4. Účast tří sourozenců A, B, C na koncertě je vázána podmínkami: nepůjde A nebo nepůjde B. Když B nepůjde, nepůjde ani A. C půjde právě tehdy, když nepůjde A. Jaké možnosti účasti na koncertě jsou?

5. Ověřte pomocí tabulky pravdivostních hodnot, zda je tautologií výroková formule $[A \Rightarrow (B \Leftrightarrow C)] \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow C)]$.

6. Ověřte, zda se jedná o tautologii $\neg[\neg(A \vee B) \wedge (\neg A \Rightarrow \neg B)]$

tŕída 4.B
školní rok 2005/2006

Otázky

1. Co je to výrok, co je to tautologie?

2. Napište obměnu, obrácení a negaci výroku: $\forall k \in Z : 3 / k^2 \Rightarrow 3 / k$. Obměnu dokažte.

3. Znegujte výroky:
a)Daná rovnice má alespoň 3 reálné kořeny.
b)Aspoň 1 žák řeší matematickou olympiádu.
c)Každý den je důvod k radosti.
d)Nikdy nevstávám před šestou hodinou ráno.
e)Každý Marťan má dvě hlavy.
f)Každý den je důvod k radosti nebo k pláči
g)Právě jsem v kině a dobře se bavím.

4. Matematický výrok má tvar:
Je-li $x \in R,\ k \in Z,\ x \neq k.\frac{\pi}{2}$, pak platí $\frac{tgx + \sin x}{tgx - \sin x} = \cot g^2 \frac{x}{2}$. Dokažte ho.

5. Dokažte výrok: Každý rotační kužel s poloměrem podstavy r a výškou v má objem $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot v \cdot r^2$. (Užitím integrálního počtu.)

Orientace

1. Definujte pojem funkce (reálná funkce reálné proměnné).
2. Načrtněte do jednoho obrázku grafy funkcí $y = 3^x$, $y = \log_3 x$.
3. Načrtněte kuželosečku o rovnici $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 4$
4. Jak získáme v trojúhelníku následující body: těžiště, ortocentrum, střed kružnice opsané a vepsané?
5. Napište komplexní číslo z=1+i v goniometrickém tvaru

2. Množiny a operace s nimi

1. Pomocí Vennova diagramu zjednodušte množinový zápis, jsou-li A, B, C libovolné podmnožiny základní množiny U:

$$\left[C\cap(A\cap C)'\right]\cup\left[A\cup\left[B\cap(A\cap B)'\right]\right].$$

2. Pomocí Vennova diagramu rozhodněte, zda pro libovolné podmnožiny A, B, C základní množiny U platí: $A'\cup(B\cap C')=(A'\cup B)\cap(A\cap C)'$.

3. Pomocí Vennova diagramu zjednodušte množinový zápis $[A\cap B\cap C']\cup\left[(A'\cup B')'\cap C\right]$, kde A, B, C jsou libovolné podmnožiny základní množiny U.

4. Zákazník sděluje prodavačce své přání: „Chci kabát s kapucí. Přitom chci, aby měl pásek a zelenou barvu, nebo to může být kabát s teplou vložkou a kapucí. V žádném případě to nesmí být kabát s teplou vložkou a bez pásku.“ Prodavačka upozorňuje zákazníka, že zelený kabát s kapucí, páskem a teplou vložkou nemají. Zákazník si nakonec koupil hnědý kabát s vložkou, páskem a kapucí. Odpovídal tento kabát jeho původnímu přání?

5. Dva svatební svědci objednávají v květinářství svatební kytici. Prodavačka jim oznamuje, že mají bílé, červené i růžové růže a doporučuje jim kytici z bílých růží. První svědek to odmítá a říká: „Představuji si kytici, ve které budou růžové růže, nesmí v ní být ale žádná červená. Nebo by se mi líbila kytice, ve které jsou červené růže, ale přitom v ní pochopitelně nebude ani jedna bílá.“ Druhý svědek s ním nesouhlasí a říká: „Mě by se líbila kytice, ve které jsou bílé růže a přitom žádná červená, nebo kytice, ve které jsou červené růže, ale nesmí v ní být pak ani jedna růžová.“ Prodavačka připravila kytici červených růží. Vyhověla přání aspoň jednoho svědka? Mohla připravit jinou kytici a přitom splnit požadavky obou svědků?

6. Ve městě jsou 3 linky autobusů A, B, C. Na lince A je 18 zastávek, na lince B je 20 zastávek, na C 25 zastávek. Počet společných stanic na linkách A, B je stejný jako na A,C, a to o 2 méně než na B a C. Samostatných zastávek na A je 10, stejně tak na B. Zastávek na A nebo B, kde nestaví C, je 22. Kolik je stanic, kde staví všechny 3 autobusy a kolik je všech stanic ve městě?

třída 4.B
školní rok 2005/2006

Otázky

1. Ověřte pomocí Vennova diagramu platnost vztahu $(A\cap B)'=A'\cup B'$.

2. Ověřte pomocí Vennova diagramu platnost vztahu

$$(A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap C')=A\cap B$$

3. Určete množinu $F=\{[x,y]\in E_2; y>|x+1|-|x-1|\wedge x^2+y^2\le 9\}$

4. Určete množinu $F=\{x\in R; |x+1|\le 3\wedge x^2-x>0\}$.

5. Určete množinu $A=\left\{x\in R; \dfrac{8}{x+10}=1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{9}{x^2}-\dfrac{27}{x^3}+\cdots\right\}$.

6. V Gaussově rovině zobrazte množinu komplexních čísel z, která splňují vztahy $|z-3|-|z-1|\le 0\wedge|z-1-i|\le 2$

Orientace

1. Definujte pojem sudá funkce.
2. Načrtněte do jednoho obrázku grafy funkcí $y=\cos x$, $y=\arccos x$.
3. Určete NSD a nsn čísel 300, 90.
4. Načrtněte do jednoho obrázku grafy funkcí $y = x^2$, $y = x^3$.
5. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+3n+1}{3n^2-3n+1}$

3. Důkazové metody v matematice

1. Dokažte, že pro všechna $n \in N$ platí:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

2. Dokažte sporem, že $\sqrt{2}$ je iracionální číslo.

3. Dokažte větu: $\forall n \in N : 3/\left(2^{2n} - 7\right)$.

4. Dokažte větu: $\forall r \in Z : r$ je sudé číslo $\Leftrightarrow$ r^3 je sudé číslo.

5. Dokažte sporem větu: $\forall r \in R - \{0\} : r^2 + \dfrac{1}{r^2} \geq 2$.

6. Dokažte, že pro všechna $n \in N$ platí:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

7. Dokažte, že pro všechna $n \in N$ platí: $6/\left(n^3 + 11n\right)$

Otázky

1. Vysvětlete, jaké základní typy důkazů se v matematice používají.

2. Dokažte větu: $\forall k \in Z : 3/k^2 \Rightarrow 3/k$.

3. Dokažte sporem nerovnost $\sqrt{13 + \sqrt{12}} < 1 + \sqrt{13 - \sqrt{12}}$.

4. Dokažte vztah $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos n.\frac{\pi}{4} + i.\sin n.\frac{\pi}{4}\right)$

5. Dokažte, že součet 3. mocnin tří po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný devíti.

6. Dokažte platnost vztahu $(1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos n.\frac{\pi}{4} - i.\sin n.\frac{\pi}{4}\right)$

7. Dokažte platnost některé Euklidovy věty.

Orientace

1. O jakou kuželosečku se jedná, má-li rovnici $x^2+2y^2+4x+4y-5=0$?
2. Do jednoho obrázku načrtněte grafy funkcí $y = \dfrac{1}{x^2}$, $y = \dfrac{1}{x^3}$.
3. Určete x v rovnici $\log_5 x = 3$
4. Která shodná zobrazení v rovině či prostoru znáte? Určete jejich samodružné body či útvary.
5. Vypočtěte $\int \left(\dfrac{2}{x} - \cos x\right) dx$

4. Reálná čísla (algebraické výrazy, dělitelnost Z)

1. Upravte výraz a určete, za jakých podmínek má smysl:

$$\left[\left(a^{0,5}+b^{0,5}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^{1,5}-b^{1,5}}\right)^{-1}\right]\cdot(ab)^{-0,5}\left(\frac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\sqrt{ab}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$$

2. Upravte výraz a určete, pro která $a\in R$ má smysl:

$$\left(\frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{a}}\right)^{\frac{1}{4}}\div\left(\frac{2a^{-1}}{\sqrt[4]{2a^4}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sqrt[4]{\frac{a^{\frac{5}{2}}}{(2a)^{-2}}}\right)^{-1}$$

3. Upravte výraz a určete, pro která $a\in R$ má smysl:

$$\frac{1-a^{-\frac{1}{2}}}{1+a^{\frac{1}{2}}}-\frac{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}}{a-1},\quad \frac{a-b}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}-\frac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$$

4. Upravte a určete, pro která $x,y\in R$ má výraz i úpravy smysl.

$$\left(\frac{x^{-2}.y^2.(x-2)^{-2}}{x^0.y^{-8}}\right)^{-2}:\frac{x^2.(x-2)^3}{x^{-4}.y^7}$$

5. Upravte výraz a určete, za jakých podmínek má smysl:

$$6a+\frac{\frac{a}{a-2}-\frac{a}{a+2}}{\frac{4a}{a^4-2a^3+8a-16}}$$

6. V oboru reálných čísel určete definiční obor funkce

$$f(x)=\sqrt{\frac{(3x-1)\cdot(x-5)}{x^2\cdot(5+2x)}}\,.$$

Otázky

1. Zobrazte na číselnou osu reálné číslo $\sqrt{15}$. Konstrukci proveďte dvěma způsoby.

2. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n platí, že číslo n^3+2n je dělitelné třemi.

3. Číslo 0,101001000100001… (kde počet nul mezi dvěma jedničkami pravidelně roste o jednu) je
a) číslo racionální, b) není číslo racionální c) převrácená hodnota jistého celého čísla d) součin dvou racionálních čísel
e) součet dvou racionálních čísel

4. Množina přirozených čísel je částí množiny čísel reálných. Určete všechny dvojice x,y∈N, pro něž je D(x,y)=6, n(x,y)=72

5. V oboru reálných čísel určete definiční obor funkce f:

$$y=\log_3\left(1+\frac{2x}{x^2-x-6}\right)$$

6. Určete všechna reálná čísla splňující rovnici $\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}=10$

7. Jsou dána 3 reálná čísla $a, b, c>0$. Sestrojte reálné číslo $x=\sqrt{a^2+bc}$.

Orientace

1. Definujte pojem limita posloupnosti
2. Do jednoho obrázku načrtněte grafy funkcí $y=2x-3$, $y=|2x-3|$
3. Zderivujte funkci $y=2.e^{-x}+3.\frac{x}{x+1}$
4. Sečtěte všechna přirozená čísla od 1 do 99.
5. Napište rovnici kružnice, která má střed na ose x, osa y je její tečnou a jejíž poloměr je 3 cm.

třída 4.B
školní rok 2005/2006

5. Komplexní čísla

1. V oboru komplexních čísel řešte rovnici $20x^2 + \frac{97}{x^2} + 16 = \frac{4\cdot\left(x^2+2\right)^2}{x^2}$. Výsledek napište v algebraickém i goniometrickém tvaru a znázorněte ho v Gaussově rovině.

2. Řešte v oboru komplexních čísel rovnici $(1-i)\cdot x^2 - (5-i)\cdot x + 6 - 4i = 0$. Výsledek napište v algebraickém i goniometrickém tvaru a znázorněte ho v Gaussově rovině.

3. Řešte v oboru komplexních čísel rovnici s neznámou *z*: $(1+i)\cdot z - (3-i)\cdot \overline{z} = 9 + 3i$. Výsledek napište v algebraickém i goniometrickém tvaru a znázorněte ho v Gaussově rovině.

4. Řešte v ***C*** rovnici $(1+i)x^2 - (2+i)x + 3 + i = 0$, kořeny vyjádřete v algebraickém tvaru.

5. Řešte v ***C*** rovnici $x^8 - 272x^4 + 4096 = 0$.

6. Řešte v ***C*** rovnici $x^4 + 2 - 2i = 0$.

7. Je dán pravidelný pětiúhelník se středem v počátku Gaussovy roviny, jehož jeden vrchol je obrazem komplexního čísla *i*. Určete komplexní čísla, jejichž obrazy jsou zbývající vrcholy pětiúhelníku.

8. Vypočtěte součet s = $1+x+x^2+\ldots+x^{19}$, kde $x = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

třída 4.B
školní rok 2005/2006

Otázky

1. Vypočtěte: $\frac{4-2i}{3-i} + \frac{2i^{48} - 3i^{57} + 2i^{73}}{i^{60} + 3i^{25}}$

2. Vypočtěte: $\left(-\sqrt{3} - i\right)^{12}$

3. Vypočtěte: $\frac{\left|\frac{4-3i}{5i}\right| + \left|\frac{3-i}{1-i}\right|}{|1+2i|}$

4. Užitím Moivreovy a binomické věty vyjádřete $\cos 3\alpha$ pomocí $\cos\alpha$ a $\sin\alpha$.

5. Řešte rovnici $x^2 + 4x + 13 = 0$ pro $x \in C$.

6. Znázorněte v Gaussově rovině všechna komplexní čísla *z*, která splňují nerovnici $|z-2| \le |z-1+3i|$.

7. V oboru komplexních čísel určete $x = \sqrt[3]{-8}$.

8. Řešte rovnici $-z = \overline{z}^2$ v oboru komplexních čísel.

9. Rovnice $x^2+px+17=0$ má jeden kořen $x_1 = 3 - 2i\sqrt{2}$. Určete druhý kořen a parametr $p \in R$.

10. Sečtěte 3 prostřední členy rozvoje výrazu $(1-i)^{100}$

Orientace

1. Vysvětlete pojem určitý integrál (z geometrického názoru).
2. Načrtněte do jednoho obrázku grafy funkcí $y = 3^x$, $y = \log_3 x$
3. Napište vektor kolmý k vektoru $\vec{v} = (3,1)$
4. Načrtněte funkci y = f(x), která splňuje tyto podmínky:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2,\ \lim_{x\to-2^-} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to-2^+} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

5. Napište rovnici přímky, která prochází bodem A[1,0] a je rovnoběžná s přímkou y = 3x+5.

6. Úprava nealgebraických výrazů

1. Zjednodušte výraz a určete, za jakých podmínek má smysl:

$$\frac{tg^3\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha} + tg\alpha$$

2. Zjednodušte výraz a určete, za jakých podmínek má smysl:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) - \cos(-5x)}{4\sin x \cdot \cos 2x}$$

3. Zjednodušte výraz a určete, za jakých podmínek má smysl:

$$\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x}$$

4. Určete cos 2x, víte-li:

$$\frac{6\sin x + 5\cos x}{4\sin x + \cos x} = 2$$

5. Vypočtěte sin 2x + cos 2x, je-li:

$$\cot gx = \frac{8}{15}$$

6. Určete cos 2x, víte-li:

$$tg\,\frac{x}{2} = \frac{3}{2}$$

Otázky

1. Určete hodnotu výrazu $\log x + \log\sqrt{x} + \log\sqrt[4]{x} + \dots$ a pak určete, pro jaké reálné číslo x je hodnota tohoto výrazu rovna 2.
2. Pro kterou hodnotu $x \in R$ je hodnota výrazu $4^{\cos^2 x} + 4^{\cos 2x}$ rovna třem?
3. Určete definiční obor a graf funkce $y = 4^{\frac{x+|x|}{2}}$
4. Upravte pro všechny přípustné hodnoty x výraz
$$\frac{\sin\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha} : \frac{\cos 3\alpha - \cos\alpha}{\sin 3\alpha + \sin\alpha}.$$
5. Určete 3. člen binomického rozvoje výrazu $\left(z.^{2\log z}\sqrt{z} + \frac{\sqrt{10}}{\left(\sqrt{z}\right)^{5\log z}}\right)^{10}$

Orientace

1) Definujte pojem rozdíl množin A, B.
2) Načrtněte do jednoho obrázku grafy funkcí $y = x^2$, $y = 2.x^2$
3) Určete x v rovnici $\log_{\frac{1}{5}} x = 3$
4) Která shodná zobrazení v rovině či prostoru znáte? Určete jejich samodružné body či útvary.
5) O jakou kuželosečku se jedná, má-li rovnici $x^2-2y^2+4x+4y-5=0$?

7. Rovnice

1. Řešte v R rovnici $\sqrt{a-\sqrt{a^2-x^2}}=x$ s parametrem $a\in R$.

2. Stanovte hodnotu parametru $a\in R$ v rovnici $ax^2-(2a+3)x+a=0$ tak, aby rovnice měla oba kořeny kladné.

3. Proveďte úplnou diskusi řešení rovnice $(m^2-1)x^2+2mx+1=0$ s parametrem $m\in R$.

4. V množině R řešte rovnici $\frac{1}{x-2a}+\frac{2x}{a(x+a)}=\frac{4x-a+6}{a(x+a)(x-2a)}$, kde $a\in R$ je parametr.

5. Řešte v R rovnici $px-\frac{2}{p^2}=\frac{1}{p}(4x+1)$ s parametrem $p\in R$.

6. Řešte v R rovnici $\frac{x^4}{a+b}=\frac{x^2}{a-b}$ s parametry $a,b\in R$.

Otázky

1. Aniž byste řešili rovnici $x^2-x-42=0$, sestavte rovnici, jejímiž kořeny jsou druhé mocniny kořenů dané rovnice.

2. Řešte v R rovnici $\frac{a}{3+x}=\frac{5}{x}$ s parametrem $a\in R$.

3. Řešte v R početně nerovnici $x^2-x|x-2|-4\geq 0$.

4. Řešte v R rovnici $4x^5+12x^4+11x^3+11x^2+12x+4=0$.

5. Definujte pojmy absolutní hodnota reálného čísla a, iracionální rovnice.

6. Řešte v R rovnici $\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}=8$

7. Řešte v R rovnici $\sqrt{2\cdot(x-3)}=3-x$

Orientace

1. Definujte pojem kartézský součin množin AxB
2. Do jednoho obrázku načrtněte grafy funkcí y = -3x+5, y = 3x+5.
3. Pomocí Pythagorovy věty zkonstruujte úsečku $x=\sqrt{7}$.
4. Upravte $\frac{(n+2)!}{(n-1)!}$
5. Vypočtěte $\int\left(\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$

třída 4.B
školní rok 2005/2006

8. Nerovnice

1. Řešte v ***R*** nerovnici $\frac{12x^2-36x+27}{8x^2-18}>\frac{3}{2}$.

2. V množině R řešte nerovnici $\frac{x^4}{x+2}+\frac{x^4}{3-x}<\frac{(10x-6)x^2}{-x^2+x+6}$.

3. Řešte v R nerovnici $1+\sqrt{1-x^2}<\sqrt{3-x^2}$.

4. Řešte v R nerovnici $\frac{(4-x^2)(x+3)}{(x^2-16)(x-1)}<0$.

5. V intervalu $\langle 0;2\pi\rangle$ řešte nerovnici $\cos 2x+5\cos x+3\geq 0$.

6. Řešte v R nerovnici $|x+2|+|2x-1|<7-|3x-4|$.

7. Řešte v R nerovnici $\log(x-4)+\log(x-2)>1$.

8. Řešte v R nerovnici $\frac{1}{2^x+2}<\frac{2^x}{2^x-1}$.

Otázky

1. Řešte nerovnici v Z $|2x+3|\geq|4x-3|$

2. Řešte nerovnici v Z $(4-x^2)\cdot(x-1)\cdot x\geq 0$

3. V Gaussově rovině vyznačte množinu řešení rovnice $|z-3-4i|\leq 5$.

4. Řešte v R nerovnici $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}<\sqrt{2x+3}$.

5. Řešte v R nerovnici $|x^2-2x+3|<x+1$

Orientace

1. Nadefinujte pojem posloupnost, charakterizujte aritmetickou a geometrickou posloupnost.
2. Do jednoho obrázku načrtněte grafy funkcí y=tg x, y=arctg x
3. Pomocí Vennova diagramu znázorněte množiny
$$A\cap B\cap C,\quad (A-B)\cup C$$
4. Určete počet úhlopříček a součet vnitřních úhlů v konvexním osmiúhelníku.
5. Zkraťte kombinační číslo $\binom{n+2}{n-1}$

třída 4.B
školní rok 2005/2006

9. Soustavy rovnic a nerovnic

1. Rozdíl druhé mocniny dvojciferného čísla a dvaadvacetinásobku jeho ciferného součinu se rovná 400. Zaměníme-li pořadí cifer a od druhé mocniny takto vzniklého opět dvojciferného čísla odečteme jeho ciferný součin vynásobený 208, dostaneme číslo 100. Určete toto číslo.

2. Užitím matic vyřešte v R^4 soustavu rovnic:

$$x+2y+3z+4u=10$$
$$2x+y-z+3u=5$$
$$3x+4y-z-u=5$$
$$-x-2y+3z+u=1$$

3. Řešte v R soustavu nerovnic:

$$3x^2-3x+4>2x^2+2x-2$$
$$3-\frac{2x-17}{x-5}>\frac{x-5}{x-2}$$

4. Řešte v R^2 soustavu rovnic s parametrem $a\in R$.

$$x+ay=1$$
$$ax-3ay=2a+3$$

5. Řešte v R^2 soustavu rovnic s parametrem $b\in R$.

$$x+(b-1)y=1$$
$$(b+1)x+3y=-1$$

6. Řešte v R^2 soustavu rovnic s parametrem $a\in R$ a určete, pro která a má soustava kladné kořeny.

$$ax-2y=3$$
$$3x+ay=4$$

Otázky

1. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{5x^2+9x+2}{x^3+3x^2+x+3}dx$

2. Řešte graficky i početně soustavu nerovnic $x^2-x-6\geq 0, \left|x^2-x-6\right|\leq 3$

3. Ze 326ti zaměstnanců jistého podniku cestuje do práce 92 vlakem. Autobusem určitě necestuje 143 zaměstnanců. Právě jedním z dopravních prostředků cestuje rovněž 143 zaměstnanců. Kolik jich cestuje jen vlakem, jen autobusem, kolik oběma prostředky?

4. Určete vzájemnou polohu přímky $p=\leftrightarrow AB$, $A[5;-1], B[-3;-7]$ a kružnice $k: x^2+y^2-4x-6y-12=0$.

5. Součet převrácených hodnot dvou čísel je roven pěti, součet čtverců těchto převrácených hodnot je roven třinácti. Určete tato čísla.

Orientace

1. Usměrněte zlomek $\frac{3}{\sqrt{5}+2}$
2. Do jednoho obrázku načrtněte grafy funkcí $y=\sin x$, $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$
3. Definujte pojem zobrazení
4. Určete průsečík funkce $y=2-2^x$ s osou x a graf této funkce načrtněte
5. Pro jaké x platí rovnost $tg\ x=1$?

10. Základní vlastnosti funkcí

1. Vyšetřete průběh funkce $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ a určete její základní vlastnosti (symetrie, monotonie, extrémy, konvexnost, konkávnost, inflexní body), načrtněte její graf.

2. Vyšetřete průběh funkce $f(x)=\frac{2}{1-x^2}$ a určete její základní vlastnosti (symetrie, monotonie, extrémy, konvexnost, konkávnost, inflexní body), načrtněte její graf.

3. Vyšetřete průběh funkce $f(x)=x^2\cdot e^{-x}$ a určete její základní vlastnosti (symetrie, monotonie, extrémy, konvexnost, konkávnost, inflexní body), načrtněte její graf.

4. Sestrojte graf funkce $f(x)=\frac{|x|}{1-|x|}$ a určete její vlastnosti.

5. Je dána funkce $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x+2)+3$. Určete její definiční obor a obor hodnot a načrtněte její graf. Rozhodněte, zda k funkci f existuje inverzní funkce a pokud ano, určete ji, stanovte její definiční obor a obor hodnot a načrtněte její graf.

6. Sestrojte graf funkce $f(x)=\left|x^2-4|x|+3\right|$ a určete její vlastnosti.

Otázky

1. Vysvětlete význam asymptot a způsob jejich určování. Ukažte na průběhu funkce $f(x)=\frac{1-x^3}{x^2}$.

2. Vysvětlete pojem inverzní funkce, určete inverzní funkci k funkci $f(x)=3^{x-2}-4$.

3. Vysvětlete rozdíl mezi funkcemi $f(x)=3x$ a $g(x)=\frac{3x^2-3x}{x-1}$.Vysvětlete na tomto příkladě pojem funkce spojitá v bodě.

4. Vyšetřete pro funkci $f(x)=5^{\frac{x-2}{x^2}}$ limity v krajních bodech definičního oboru a monotonii. Načrtněte na základě těchto výsledků přibližný průběh této funkce.

5. Řešte nerovnici $x\geq x^3$.

Orientace

1. Co rozumíte pod pojmem pravděpodobnost jevu A?
2. Do jednoho obrázku načrtněte grafy funkcí $y=x^{-1}$, $y=\frac{2}{x}$.
3. Rozložte dvojčlen x^2+1 na součin dvou lineárních dvojčlenů a) v oboru reálných čísel, b) v oboru komplexních čísel
4. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla x platí $3/(x^3-x)$
5. Odvoďte, jakou délku má výška v rovnostranném trojúhelníku o straně a.

třída 4.B
školní rok 2005/2006

11. Polynomická, racionální a mocninná funkce

1. Sestrojte graf a určete vlastnosti funkce $f(x)=\left|\frac{2x-3}{3x-2}\right|$.

2. Sestrojte graf funkce $f(x)=\frac{|3x-2|}{x+3}$ a určete, zda k ní existuje funkce inverzní.

3. Sestrojte graf funkce $f(x)=\frac{2x+2}{4x-3}$ a určete inverzní funkci.

4. Načrtněte graf funkce $f(x)=-x^2+2x+2$. Vysvětlete, jak můžeme určit vrchol (všechny možnosti). Načrtněte graf funkce $g(x)=\left|-x^2+2|x|+2\right|$.

5. Sestrojte graf funkce :

$$y=|x-2|-|x+2|+x$$

6. Zobrazte množinu bodů, jejichž souřadnice vyhovují nerovnosti:

$$|x|+|2y|\le 2$$

7. Zobrazte množinu bodů, jejichž souřadnice vyhovují nerovnostem:

$$x\ge 1 \wedge y\ge -1 \wedge 3x+4y-12\le 0$$

Otázky

1. Vyšetřete kvadratickou funkci, jejíž graf prochází body A[0;2], B[-2;10], C[1;1].

2. Zakreslete do jednoho obrázku dvojice funkcí:

$f(x)=x^3$, $g(x)=x^4$ $k(x)=x^{\frac{1}{2}}$, $l(x)=x^{\frac{1}{3}}$

$m(x)=x^{-2}$, $n(x)=x^{-3}$

3. Užitím diferenciálního počtu vyšetřete průběh funkce

$$f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-6x.$$

4. Užitím diferenciálního počtu vyšetřete průběh funkce

$$\mathrm{f}(\mathrm{x})=\frac{\mathrm{x}^3}{6}-\frac{\mathrm{x}^2}{4}+2\mathrm{x}$$

Orientace

1. Definujte pojem funkce (reálná funkce reálné proměnné).
2. Načrtněte do jednoho obrázku grafy funkcí $y=3^x$, $y=\log_3 x$.
3. Načrtněte kuželosečku o rovnici $(x+3)^2+(y-2)^2=4$
4. Jak získáme v trojúhelníku následující body: těžiště, ortocentrum, střed kružnice opsané a vepsané?
5. Napište komplexní číslo z=1+i v goniometrickém tvaru

třída 4.B
školní rok 2005/2006

12. Exponenciální funkce, rovnice, nerovnice

1. Řešte v R rovnici $\left(3+\sqrt{8}\right)^x + \left(3-\sqrt{8}\right)^x = 34$
2. Řešte v Z rovnici $x^x - x^{-x} = 3\left(1 + x^{-x}\right)$.
3. Řešte v R rovnici $\sqrt{3^{4x}+1} + \sqrt{2\cdot 3^{4x}+3} = 5$.
4. Řešte v R rovnici $81^x - 9^{x+1} = 3\log_3 \frac{1}{27} + 3^{2x}$.
5. Řešte v R rovnici $3^{x+1} - 2^x = 2^{x+3} - 3^x$
6. Řešte v R rovnici $2\cdot 3^{x+2} - 135 = 2\cdot\left(3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + \dots\right)$

Otázky

1. Pomocí limit a 1.derivace vyšetřete zhruba průběh funkce $y = e^{-x^2}$
2. Určete obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami $y=e^x$, $y=e^{-x}$ a přímkou $x=2$.
3. Řešte v R rovnici $2^{2x}\cdot 5^x - 2^{2x-1}\cdot 5^{x+1} = -600$
4. Řešte v R rovnici $\left(\frac{1}{3}\right)^{2-3x} = 5^x$
5. Řešte v R rovnici $2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^{x+3} = \frac{21}{8}$
6. Řešte v R rovnici $\frac{1}{4}\cdot 2^x + \frac{1}{2}\cdot 4^x = 9$

Orientace

1. Nadefinujte pojem inverzní funkce.
2. Do jednoho obrázku načrtněte grafy funkcí $y=x^2$, $y=x^4$
3. Určete stranu komolého kuželu o poloměrech podstav $r_1 = 6$cm, $r_2 = 3$cm a výšce $v = 4$cm.
4. Co je Pascalův trojúhelník, jak vypadá, co z něj umíte vyčíst?
5. Jsou dány vektory $\vec{a}(2;0;0), \vec{b}(0;1;0)$. Napište libovolný vektor na oba tyto vektory kolmý.

třída 4.B
školní rok 2005/2006

13. Logaritmická funkce, rovnice, nerovnice

1. Řešte v *R* rovnici $\log_x 2 + \log_{4x} 8 = 2 \cdot \log_{4x} 16$.

2. V množině *R* řešte rovnici $\log_{\frac{x^3}{2}} 2 + \log_4 x = 1$.

3. V množině *R* řešte rovnici $7 \cdot 6^x - 2 \cdot 4^x = 6 \cdot 9^x$.

4. V množině *R* řešte rovnici $x^{\log x} + 10 \cdot x^{-\log x} = 11$.

5. Řešte v ***N*** rovnici $3 \cdot 2^{\log x} + 8 \cdot 2^{-\log x} = 5\left(1 + 10 \log \sqrt[5]{100}\right)$.

6. Řešte v N rovnici $\log_4 \{2 \log_3 [1 + \log_2 (1 + 3 \log_2 x)]\} = \frac{1}{2}$

Otázky

1. Definujte pojmy exponenciální a logaritmická funkce, uveďte jejich vlastnosti a grafy.

2. Řešte nerovnici $\log^2(2x) + \log(2x) > 20$

3. Řešte rovnici $\frac{5\log x + 3}{3\log x - 4} = \frac{\log x + 5}{3\log x - 4} - 2$

4. Řešte rovnici $\log(x+2) - \log(x-1) = 2 - \log 4$

5. Řešte rovnici $\log^2 x + 2\log x - 3 = 0$

6. Řešte v N rovnici $\log_3 (3^{x^2 - 13x + 28} + \frac{2}{9}) = \log_5 0{,}2$

Orientace

1. Definujte pojem primitivní funkce F (x) k funkci f (x) na intervalu (a, b).
2. Načrtněte do jednoho obrázku grafy funkcí $y = 2-x^2$, $y = (x-2)^2$.
3. Určete typ a charakteristiky posloupnosti členů $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$
4. Zderivujte funkci $y = 2.\sin^2(3x)$
5. Určete základní parametry paraboly o rovnici $(y-2)^2 = 2x+6$ a načrtněte ji.

třída 4.B
školní rok 2005/2006

14. Goniometrická funkce, rovnice, nerovnice

1. Řešte v R rovnici: $6 \cdot \sin^2 x - 7 \cdot \sin 2x + 8 \cdot \cos^2 x = 0$

2. Řešte v R rovnici: $\sqrt{3} \cdot \sin x + \cos x = 2$

3. Řešte v R rovnici: $1 + \sin x - \cos x - tgx = 0$

4. Upravte výraz a určete, za jakých podmínek má smysl:

$$\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x}$$

5. Řešte rovnici $1 - tgx + tg^2 x - \cdots = \frac{tg 2x}{1 + tg 2x}$, $x \in (0; \pi)$.

6. Řešte v R rovnici $6 \sin^2 x - 7 \sin 2x + 8 \cos^2 x = 0$.

7. Řešte v **R**:

$$\sqrt{3}\ \mathrm{tg}^2\ x + 2\ \mathrm{tg}\ x - \sqrt{3} = 0$$

Otázky

1. Určete definiční obor funkce $f(x) = \sqrt{\frac{1 + tgx}{1 - tgx}}$.

2. Řešte v R rovnici $2 \sin x = \sqrt{3} \cdot tgx$.

3. Načrtněte graf funkce $f(x) = \left| 4 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 1 \right|$ a určete její vlastnosti.

4. Vypočtěte $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin 3x}{x \cdot \cos x} \right)$.

5. Dokažte Moivreovu větu (matematickou indukcí).

6. Vypočtěte $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x . \sin x} - \frac{1}{x^2} \right)$

Orientace

1. Nadefinujte pojem prvočíslo.
2. Do jednoho obrázku načrtněte grafy funkcí y=(x-1)^2, y=(x-1)^3
3. Upravte výraz $\left(x^{-1} + y^{-1} \right)^{-1}$
4. Pomocí Vennových diagramů znázorněte množinu $A \cup B'$, $A \cap B$,
5. Která shodná zobrazení znáte?

třída 4.B
školní rok 2005/2006

15. Trigonometrie

1. Topol vrhá 7,7m dlouhý stín na stráň, která stoupá od paty stromu ve směru stínu pod úhlem 15^{o}. Určete, jak vysoký je topol, je-li výška Slunce nad obzorem $47^{o}24'$.

2. Určete výšku mraku nad hladinou jezera, jestliže ho vidíme z místa A pod výškovým úhlem α a ze stejného místa vidíme jeho obraz v jezeře pod hloubkovým úhlem β. Výška místa A nad rovinou hladiny jezera je *d*. Řešte obecně.

3. Pata C rozhledny a místa A, B, ze kterých rozhlednu pozorujeme, jsou vrcholy trojúhelníku, ve kterém $|AB| = c = 80\,\text{m}$, $|\angle CAB| = \alpha = 60°$, $|\angle ABC| = \beta = 38°$. Určete výšku rozhledny, víte-li, že z místa A je vidět vrchol rozhledny pod výškovým úhlem $\delta = 50°$.

4. Z okna domu stojícího těsně nad řekou vidíme kámen na protějším břehu v hloubkovém úhlu $\alpha = 6°$. Z jiného okna, které je 12 m nad prvním oknem, vidíme stejný kámen v hloubkovém úhlu $\beta = 11°$. Jak široká je řeka?

5. Vypočtěte strany pravoúhlého trojúhelníka, má-li výšku 4cm a poloměr opsané kružnice 5cm.

6. Letadlo letí ve výšce 2 200 m k pozorovatelně. V okamžiku prvního měření je bylo vidět pod výškovým úhlem 23°, při druhém měření pod výškovým úhlem 58°. Vypočítej vzdálenost, kterou letadlo proletělo mezi oběma měřeními.

Otázky

1. Tři kružnice o poloměrech r_1=36mm, r_2=42mm, r_3=48mm se navzájem dotýkají. Jak vypočítáte velikosti úhlů, které svírají jejich středné?
2. Dokažte platnost Euklidovy věty o výšce.
3. Sestrojte třemi způsoby $\sqrt{15}$.
4. Koule o poloměru 10j je osvětlena z bodu, jehož vzdálenost od středu je 50j. Vypočtěte obsah osvětlené části.
5. Řešte ΔABC, je-li dáno a+b=100, c=80, $\gamma=70^{o}$. (Není nutné počítat číselně až do konce, stačí postup).
6. Tři síly, jejichž velikosti jsou v poměru 4:7:9, působí v rovině v témže bodě tak, že jsou v rovnováze. Určete velikosti úhlů, které tyto síly svírají.

Orientace

1. Co rozumíte pod pojmem variace (bez opakování a s opakováním)?
2. Do jednoho obrázku načrtněte grafy funkcí $y = 2^x$, $y = 2^{-x}$
3. Určete definiční obor funkce $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
4. Je dáno komplexní číslo *z=-1+i*. Napište ho v goniometrickém tvaru.
5. Vypočtěte $\int \left(\dfrac{3}{x^2} - \sin x \right) dx$

třída 4.B
školní rok 2005/2006

16. Posloupnosti a řady

1. V daném rovnostranném trojúhelníku ABC sestrojte kolmici z vrcholu C na stranu AB, patu kolmice označte B_1. Bodem B_1 veďte rovnoběžku se stranou AC, průsečík této rovnoběžky se stranou BC označte C_1. Patu kolmice z bodu C_1 na stranu AB označte B_2, průsečík strany BC a rovnoběžky se stranou AC vedené bodem B_2 označte C_2. Patu kolmice z bodu C_2 na stranu AB označte B_3, průsečík strany BC a rovnoběžky s AC vedené bodem B_3 označte C_3. Tento postup neustále opakujte. Vypočtěte délku „nekonečné“ lomené čáry AC $B_1C_1B_2C_2B_3C_3$..., která vznikne uvedeným postupem.

2. Povrch kvádru je 78 cm^2. Součet délek hran vycházejících z jednoho vrcholu je 13 cm. Určete objem kvádru, víte-li, že délky hran kvádru jsou tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti.

3. Drát má průměr 5 mm. Jedním protažením se průměr drátu zmenší o 10%.

- Jaký bude průměr drátu po deseti protaženích?
- Po kolika protaženích bude průměr drátu menší než 3 mm?

4. V obci je 23 000 obyvatel, roční přírůstek je 7% obyvatel.

- Kolik obyvatel bude mít obec za 9 let?
- Za kolik let bude mít obec 100 000 obyvatel?
- Při jakém ročním přírůstku by obec měla za 5 let 50 000 obyvatel?

5. Řešte v R rovnici $2^x + 4^x + 8^x + 16^x + \cdots = 1$.

6. Menší kořen rovnice $3x^2 - 10x + 3 = 0$ je prvním členem geometrické posloupnosti a větší kořen je jejím koeficientem. Kolik členů je třeba sečíst, aby jejich součet byl větší než 150?

7. Z jednoho bodu ramene ostrého úhlu $\alpha = 60^\circ$, který je od vrcholu vzdálen 4cm, veďte kolmici na druhé rameno, pak opět zpět atd. Určete délku takto vzniklé čáry.

8. Kolik členů aritmetické posloupnosti určené $a_{10}=8$, $a_{15}=18$ je nutno sečíst, aby součet byl větší než 100 a menší než 110?

třída 4.B
školní rok 2005/2006

Otázky

1. Definujte pojmy posloupnost a nekonečná řada.

2. Vypočtěte součet $s=1+x+x^2+...+x^{19}$, kde $x = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

3. Napište rekurentní vyjádření posloupnosti $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ a rozhodněte, zda je konvergentní.

4. Při průchodu sklem se pohltí $\frac{1}{15}$ světla. Jaká část světla zůstane po průchodu pěti skleněnými deskami?

5. Řešte v R rovnici $\log x + \log\sqrt{x} + \log\sqrt[4]{x} + \cdots = 2$.

6. Zapište ve tvaru zlomku číslo $2{,}0\overline{023}$.

Orientace

1. Jaká je definice kombinačního čísla?
2. Načrtněte graf funkce $y = \left|-x^2 + 3x\right|$
3. Rozdělte úsečku AB v poměru 3:7
4. Řešte nerovnici $|x+2| < 5$
5. K přímce *p: 2x+y-4=0* napište rovnici přímky kolmé, procházející počátkem.

17. Spojitost a limita funkce

1. Vyšetřete pouze s užitím limit průběh funkce (včetně asymptot)
$$f(x)=\frac{3x+7}{x^2-3x+2}.$$
2. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x+tg^2 x}{x\cdot\sin x}$.
3. Vyšetřete jen na základě limit průběh funkce (včetně asymptot)
$$y=\frac{1-x^3}{x^2}$$
4. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{6x-1}-\sqrt{5x+2}}$
5. Vyšetřete jen na základě limit průběh funkce (včetně asymptot)
$$y=\frac{x}{1+x^2}$$
6. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x-2}-\sqrt{x}$.

třída 4.B
školní rok 2005/2006

Otázky

1. Objasněte pojem limita posloupnosti.
2. Vysvětlete, co je L'Hospitalovo pravidlo a použijte ho při odvození
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$
3. Vypočtěte bez použití L'Hospitalova pravidla $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\left(\sqrt{x+4}-2\right)}{tg(3x)}$
4. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1+2+3+\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)$.
5. Načrtněte graf libovolné funkce f, která splňuje tyto podmínky: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.
6. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$.

Orientace

1) Uveďte geometrickou definici paraboly.
2) Do jednoho obrázku načrtněte grafy funkcí $y=x^4$, $y=x^5$.
3) Najděte všechna řešení rovnice $\sin x=\frac{1}{2}$ v R.
4) V rovnici $x^2-2x+a=0$ určete hodnotu parametru a tak, aby rovnice měla
   a) jeden dvojnásobný kořen
   b) jeden nulový kořen.
5) Kolik přímek lze proložit devíti různými body v rovině, z nichž žádné tři neleží v jedné přímce?

18. Derivace funkce

1. Najděte kužel, který má při daném povrchu maximální objem.

2. Vyšetřete průběh funkce $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, načrtněte její graf.

3. Napište rovnici normály grafu funkce $f(x)=x\ln x$ v bodě dotyku T[e;y_0].

4. Muž v loďce vzdálené 10km od pobřeží se chce dostat do místa A na pobřeží, které je vzdálené 26km. Zjistěte, kde se musí vylodit, aby dosáhl cíle v co nekratší době, když vesluje rychlostí 3,2km/h a jde rychlostí 9,6km/h.

5. Napište rovnici tečny ke křivce $y=\sqrt{25-x^2}$ v bodě dotyku T[4;?].

6. Uprostřed nad kruhovou deskou stolu o poloměru R = 1 m je zavěšený zdroj světla. Vypočítejte, do jaké výšky je ho třeba posunout, aby intenzita osvětlení okraje stolu byla největší.

Otázky

1. Objasněte pojem derivace funkce. Jaký je její geometrický a fyzikální význam?

2. Derivujte implicitně zadanou funkci $x^3-(x-a)y^2=0$.

3. Určete derivaci funkce $f(x)=\arcsin x$.

4. Dokažte, že $(x)'=1$.

5. Derivujte funkci $y=\left(\sqrt{x}\right)^{\sin x}$

6. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x.\sin x}-\frac{1}{x^2}\right)$

Orientace

1. Uveďte geometrickou definici hyperboly.
2. Do jednoho obrázku načrtněte grafy funkcí $y=x^{-1}$, $y=(x+1)^{-1}$.
3. Najděte všechna řešení nerovnice $\log_{\frac{1}{5}} x>1$
4. V Gaussově rovině zobrazte všechna komplexní čísla, pro něž platí
$$|z-3i|<4$$
5. Načrtněte trojúhelník, jehož vrcholy tvoří body, které na ciferníku znázorňují 2,7,9. Určete jeden z vnitřních úhlů tohoto trojúhelníka.

třída 4.B
školní rok 2005/2006

19. Primitivní funkce

1. Vypočtěte: a) $\int \frac{8-\sin^2 x}{\cos^2 x}dx$, b) $\int x^2 \cos x dx$.
2. Vypočtěte: a) $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^4+1}}dx$, b) $\int \frac{5\cos^2 x + 3 - 2\cos 2x}{\cos^2 x}dx$.
3. Vypočtěte: a) $\int \frac{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$, b) $\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$.
4. Vypočtěte: a) $\int \arcsin x dx$, b) $\int \cos^2 x dx$
5. Vypočtěte: a) $\int \frac{2x}{5-x^2}dx$, b) $\int \frac{1}{1+\cos 2x}dx$
6. Vypočtěte: a) $\int x tg^2 x dx$, b) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$

Otázky

1. Vysvětlete pojem primitivní funkce.
2. K funkci $f(x)=1-2x+\cos x$ určete primitivní funkci tak, aby procházela bodem A $[\pi;1]$.
3. Rozhodněte o metodě řešení a vypočtěte neurčitý integrál
$$\int \cos x \cdot \sin x dx .$$
4. Rozhodněte o metodě řešení a vypočtěte neurčitý integrál
$$\int \frac{x^2+5x-9}{x^3-2x^2+x-2}dx .$$
5. Rozhodněte o metodě řešení a vypočtěte integrál $\int \cos^5 x . \sin^3 x dx$
6. Rozhodněte o metodě řešení a vypočtěte neurčitý integrál $\int \ln x dx$, $x \in (0,+\infty)$.
7. Určete křivku procházející bodem [-1,1], která má tu vlastnost, že směrnice její tečny v libovolném jejím bodě se rovná druhé mocnině x-ové souřadnice dotykového bodu.

Orientace

1. Uveďte klasickou definici pravděpodobnosti jevu A.
2. Do jednoho obrázku načrtněte grafy funkcí $y = x^3$, $y=\sqrt[3]{x}$
3. Jakou vzájemnou polohu mají přímky p: $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-2t \end{cases}$, $t \in (-\infty;\infty)$
   q: $\begin{cases} x = 5-2s \\ y = 1-s \end{cases}$, $s \in (-\infty;\infty)$
4. Rozhodněte, o jaký typ složeného výroku se jedná: „Je-li číslo zakončeno cifrou 1, je i jeho druhá mocnina zakončena cifrou 1“. Vyslovte obměnu a negaci tohoto výroku.
5. Řešte nerovnici $\frac{(3-x)(x+5)}{x^3} > 0$

třída 4.B
školní rok 2005/2006

20. Aplikace určitého integrálu

1. Vypočtěte obsah útvaru, který je ohraničen grafy funkcí $f(x)=4x-x^2$, $g(x)=x^2-2x$.

2. Vypočtěte obsah útvaru, který je ohraničen grafy funkcí $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x$ a přímkami o rovnicích $y=0$, $x=3$.

3. Vypočtěte obsah útvaru, který je ohraničen grafy funkcí $f(x)=e^x$, $g(x)=e^{-x}$, $h(x)=e$.

4. Určete délku křivky $y^2=(x+1)^3$ v levé polorovině vyťaté přímkou x=4.

5. Vypočtěte obsah oblasti omezené křivkami $y=x^2+4x, \quad x-y+4=0$.

6. Nádoba ve tvaru polokoule s poloměrem 10 m je naplněná vodou. Jaká práce je nutná je její vyčerpání?

Otázky

1. Určete objem tělesa, které vznikne rotací křivky $f(x)=\sin x$ v intervalu $\langle 0;\pi\rangle$ kolem osy *x*.

2. Odvoďte vztah pro výpočet objemu rotačního kuželu s poloměrem podstavy *r* a výškou *v*.

3. Odvoďte vztah pro výpočet objemu koule o poloměru *r*.

4. Vypočtěte obsah obrazce ohraničeného křivkami $xy=4$, $x+y=5$.

5. Odvoďte vztah pro výpočet obsahu kruhu o poloměru *r*. (Naznačte postup)

6. Odvoďte vztah pro výpočet délky křivky, která je grafem funkce y=f(x) na intervalu <a,b>.

Orientace

1. Uveďte geometrickou definici elipsy.

2. Do jednoho obrázku načrtněte grafy funkcí $y=e^x, \quad y=2^x$.

3. Je dáno komplexní číslo *z*. Napište jeho algebraický tvar a do Gaussovy roviny zakreslete číslo *z’* = -*z*

4. „Jestliže dnes úspěšně odmaturuji, budu zítra oslavovat.“ Vyslovte negaci a obměnu tohoto výroku.

5. Určete definiční obor funkce $y=\dfrac{1}{\log_2(x+2)}$

třída 4.B
školní rok 2005/2006

21. Kombinatorika a pravděpodobnost

1. Kolik různých nejvýše pěticiferných přirozených čísel lze vytvořit z cifer 0, 3, 5? Kolik z nich je větších než 50 000?

2. Určete počet všech přímek určených pěti různými body v rovině, z nichž právě 3 leží v jedné přímce.

3. V obchodě mají čtyři druhy jogurtů (jahodový, čokoládový, oříškový, meruňkový). Určete, kolik je možností na nákup 5 libovolných jogurtů.

4. Pro která přirozená čísla n platí rovnost

$$\binom{n}{3}+\binom{n+2}{3}+\binom{n+4}{3}=\frac{n^3}{2}+88\,?$$

5. Pro která přirozená čísla $n > 1$ platí nerovnost

$$\binom{n}{2}+\binom{n+3}{2}+\binom{n+6}{2}<72\,?$$

6. Řešte v N rovnici $\binom{6}{5}\cdot\binom{y+1}{y-1}-\binom{6}{4}\cdot\binom{y+2}{y+1}=\binom{4}{2}$.

7. Lékař úspěšně léčí v 80% případů. Určete pravděpodobnost, že z 10 vyšetřovaných pacientů vyléčí alespoň sedm.

8. Do cukrárny bylo dodáno náhodně 10 věnečků z várky, ve které bylo celkem 40 věnečků a 8 z nich bylo bez cukrové polevy. Určete pravděpodobnost, že v cukrárně dostali alespoň 2 věnečky bez polevy.

9. Kolik čtyřciferných čísel vytvořených z číslic 3, 4, 5, 6, v nichž se cifry mohou opakovat, je dělitelných devíti?

10. Řešte rovnici $12\cdot\binom{x}{x-2}+37\cdot\binom{x}{x-1}=5\cdot\binom{x}{x}+30\cdot\binom{x}{x-3}$.

třída 4.B
školní rok 2005/2006

Otázky

1. Kolika způsoby můžeme vytvořit ze 7 chlapců a 4 dívek volejbalové družstvo o šesti členech, mají-li v něm hrát aspoň 2 dívky?

2. V účetních dokladech je chyba. Kontrolují je nezávisle dva kontroloři. První najde chybu s pravděpodobností 0,9, druhý s pravděpodobností 0,95. Jaká je pravděpodobnost, že chybu najde aspoň jeden z nich?

3. V urně je 7 bílých a 9 modrých kuliček. Vybereme jednu z nich. Pak vybereme druhou. Jaká je pravděpodobnost, že první vybraná kulička bude bílá a druhá modrá, když

a) první vybranou kuličku vrátíme zpět do urny,

b) první vybranou kuličku nevrátíme zpět do urny.

4. Kolik různých (i nesmyslných) slov lze vytvořit z písmen slova MISSISSIPPI (za použití všech písmen)?

5. Užitím Moivreovy věty a binomické věty vyjádřete $\sin 3x$, $\cos 3x$ pomocí $\sin x$, $\cos x$.

6. Řešte v $\boldsymbol{N}$ rovnici $\frac{(n-1)!}{(n-2)!}+\binom{n-2}{2}=4$.

7. Zvětší-li se počet prvků o 1, zvětší se počet kombinací třetí třídy o 21. Kolik je dáno prvků?

8. Určete absolutní člen rozvoje výrazu $\left(2x^2-\frac{3}{x}\right)^6$.

Orientace

1. Definujte pojem shodné zobrazení v rovině.
2. Do jednoho obrázku načrtněte grafy funkcí
$$y = arc\cot gx, \quad y=\cot gx.$$
3. Pro jaké a platí rovnost $\log_a 9 = 2$?
4. Určete všechna řešení rovnice $\sqrt{x-2}=-3$ v oboru reálných čísel.
5. Načrtněte křivku o rovnici $(x+1)^2+(y-2)^2=4$

22. Geometrická zobrazení v rovině i v prostoru

1. Je dána kružnice $k(O;r)$ a její vnější přímka *t*, na níž leží bod A. Sestrojte kružnici, která se dotýká dané přímky *t* v bodě A a dané kružnice *k*.
2. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $a:b=2:3$, γ =60°, $t_c=5$ j.
3. Jsou dány dvě různoběžky *a*, *b* a bod M ($M \notin a$, $M \notin b$). Sestrojte kružnici, která prochází bodem M a dotýká se přímek *a*, *b*.
4. Jsou dány dvě rovnoběžné přímky *a*, *b* a bod C, který neleží v rovinném pásu (*a*, *b*). Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky ABC tak, aby A∈*a*, B∈*b*.
5. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC, jehož strana má délku a. Vepište do něj co největší čtverec a vypočtěte délku jeho strany. Napište postup konstrukce.
6. Jsou dány 2 různoběžky p, q a mimo ně bod A. Sestrojte čtverec ABCD, aby $B \in p, D \in q$

Otázky

1. Co je to zobrazení v rovině, jaká znáte shodná zobrazení, mezi jaká zobrazení patří stejnolehlost?
2. V rovině je sestrojen kruhový oblouk. Střed kružnice, jejíž je součástí, chybí. Sestrojte ho.
3. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $a : c = 4 : 7$, $\beta = 45°$, $t_c = 4{,}5$ cm. Proveďte jen rozbor.
4. Jaká zobrazení určují rovnice mezi komplexními čísly, jestliže $Z: z \to z'$ a je $z' = \bar{z}$, $z' = -z$, $z' = iz$?
5. V rovině jsou dány dvě kružnice *k*, *l*, které se protínají. Jedním jejich společným bodem veďte všechny přímky, které vytínají na kružnicích a) shodné tětivy**,** b) tětivy o poměru délek 3:2.

Orientace

1. Co se rozumí pod pojmem derivace funkce y=f(x) v bodě x_0, jaký je její geometrický a fyzikální význam?
2. Sečtěte všechna lichá čísla od 3 do 99.
3. Načrtněte do jednoho obrázku grafy funkcí $y=\sqrt[3]{x}, \quad y=\sqrt[4]{x}$
4. Načrtněte křivku o rovnici $(x+4)^2+(y-2)^2=5$
5. Řešte nerovnici $\sin x > \frac{1}{2} \quad pro \quad x \in \langle 0;2\pi \rangle$

třída 4.B
školní rok 2005/2006

23. Konstrukční úlohy v planimetrii

1. Je dána úsečka AB, |AB| = 5 cm. Sestrojte všechny tětivové čtyřúhelníky ABCD, v nichž je dáno e = 8 cm, β = 120° a ε, $\varepsilon = |\angle AEB|$ = 105°, kde E je průsečík úhlopříček.

2. Sestrojte všechny tečnové čtyřúhelníky ABCD, je-li dáno a = 7,5 cm, b = 3,5 cm, α = 45°, ρ = 2 cm.

3. Sestrojte všechny rovnoběžníky ABCD, je-li dáno a = 6 cm, v_a = 2 cm, $\varepsilon \in (0;\pi)$, $\varepsilon = |\angle AEB|$, kde E je průsečík úhlopříček. Proveďte diskusi pro parametr ε.

4. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, ve kterých je v_c = 3 cm, b = 4 cm, ρ = 1 cm.

5. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, je-li dána úsečka AB, |AB| = 4 cm, a ve kterých $\gamma = \frac{\pi}{3}$ a $v_c = v$ cm, $v > 0$. Proveďte diskuzi pro v_c.

6. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno γ = 75°, v_a = 3,5 cm, r = 2,5 cm.

Otázky

1. Obdélník má strany o délkách a, b. Sestrojte čtverec o stejném obsahu.

2. Sestrojte kružnici k (S; r), která je soustředná s danými dvěma soustřednými kružnicemi a dělí na dvě části se stejným obsahem mezikruží se středem S a poloměry 2 cm a 4 cm.

3. Co je tečnový a tětivový čtyřúhelník a jaké mají vlastnosti?

4. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC, je-li dán poloměr r jeho opsané kružnice. Nad výškou tohoto trojúhelníku sestrojte další rovnostranný trojúhelník a stejným způsobem pokračujte dále. Určete součet obsahů těchto trojúhelníků, jestliže jejich počet neomezeně roste.

5. Je dána úsečka AC a její vnitřní bod B a úhly α, β. Sestrojte množinu všech bodů, z nichž je vidět úsečka AB pod úhlem α a úsečka BC pod úhlem β.

Orientace

1. Které složené výroky znáte?
2. Do jednoho obrázku načrtněte grafy funkcí $y = 3^x$, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.
3. Řešte nerovnici $x^2 - 2x - 35 \geq 0$
4. Je dána přímka v rovině o rovnici $y = -3x + 8$. Napište rovnici přímky s ní rovnoběžné procházející počátkem.
5. Určete směrnici tečny k funkci $y = \frac{x}{x^2+1}$ v bodě x=2.

třída 4.B
školní rok 2005/2006

24. Polohové vlastnosti v rovině

1. Úhlopříčky deltoidu mají velikosti v poměru 3:4, obsah deltoidu je 96 cm^2. Jak dlouhé jsou strany a úhlopříčky deltoidu, protíná-li jedna druhou ve třech osminách její délky?
2. Kosočtverec je dán svým obsahem S = 150 cm^2 a poměrem úhlopříček e: f = 3 : 4. Vypočítejte jeho výšku, délky strany a úhlopříček.
3. Do kružnice o poloměru 19 mm je vepsán pravidelný šestiúhelník. Vypočítejte obsah kruhové úseče ohraničené stranou šestiúhelníku a kružnicí.
4. Do rovnostranného trojúhelníku o straně a je vepsán kruh, nad něj další kruh, pak znovu další, atd. Určete součet obsahů všech těchto kruhů. Do jakých dalších témat byste úlohu také zařadili?
5. Dokažte, že průsečíky úhlopříček pravidelného pětiúhelníku *ABCDE* jsou vrcholy pravidelného pětiúhelníku. Kolikrát je obsah tohoto pětiúhelníku menší, než obsah pětiúhelníku *ABCDE.*
6. Dokažte, že se osy stran trojúhelníku se protínají v jednom bodě. Totéž pro osy úhlů a těžnice.

Otázky

1. Diskutujte Apoiloniovu úlohu *ppp.*
2. Řešte Pappovu úlohu *(Bp)k.*
3. Diskutujte Apolloniovu úlohu *BBp*
4. Rozdělte trojúhelník na tři části stejného obsahu.
5. Euklidova a Lobačevskeho geometrie. Sestrojte euklidovsky úhel o velikosti 38°
6. Diskutujte vzájemnou polohu p ,p a p, k.

Orientace

1. Uveďte geometrickou definici vektorového součinu
2. Do jednoho obrázku načrtněte grafy funkcí $y = x^3$, $y = x^{-3}$
3. Pomocí Vennova diagramu znázorněte množinu $A \cup (B \cap C)$
4. Pro funkci $y = 3^x$ určete definiční obor, obor hodnot, derivaci, primitivní funkci, limity v krajních bodech definičního oboru.
5. Určete řez krychle rovinou $\leftrightarrow 123$ (1,2,3 jsou středy AB, CB a GH).

25. Polohové vlastnosti v prostoru

1. Sestrojte řez krychle ABCDEFGH rovinou KLM, kde K leží na polopřímce DH tak, že H je středem úsečky DK, L leží na úsečce AF, přičemž $|AL| = 2 \cdot |FL|$, M je bodem hrany FG, přitom $|FM| = 3 \cdot |GM|$. Nerýsujte, vše přehledně načrtněte!

2. Sestrojte řez libovolného pětibokého jehlanu ABCDEV rovinou KLM, kde K je střed hrany AB, L leží na hraně CV, přičemž $|VL| > |CL|$, M je bod hrany EV, přitom $|VM| < |ME|$. Nerýsujte, vše přehledně načrtněte!

3. Je dán pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV a rovina PHE, kde P leží na polopřímce DC tak že $|DP| = \frac{5}{4} \cdot |DC|$, H leží na hraně DV, přičemž $|VH| = \frac{1}{4} \cdot |DV|$, bod E je střed hrany AB. Sestrojte řez jehlanu rovinou PHE a průnik výšky jehlanu a roviny PHE. Nerýsujte, vše přehledně načrtněte!

4. Je dán pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV (viz příloha). Sestrojte řez jehlanu rovinou MNP, kde P∈DV, M∈↔VB, N∈VC (dle obrázku) a sestrojte průsečík této roviny s přímkou RS, kde R∈AB, 3·|AR| = |RB|, S∈CV, |CS| = |VS|.

5. Je dán pětiboký jehlan ABCDEV (viz příloha). Sestrojte řez jehlanu rovinou KLM, kde K∈AB, L∈CV, M∈EV (dle obrázku).

6. Je dána krychle ABCDEFGH (viz příloha). Sestrojte řez krychle rovinou OPR, kde O∈↔DH, P∈↔EF, R∈BC (dle obrázku) a rovinou KLM, kde K∈AE, L∈AB, M∈CG (dle obrázku) a sestrojte průsečnici obou rovin. Rýsujte přesně!

Otázky

1. Jakou vzájemnou polohu může mít přímka a rovina, resp. 2 přímky v prostoru, 3 roviny?

2. Načrtněte krychli ABCDEFGH, zvolte body K∈AB, L∈EF, M∈EH, určete řez ↔KLM.

3. Určete vzájemnou polohu přímek XY a UV v obrázcích v příloze.

4. Je dána jednotková krychle ABCDEFGH. Určete početně i konstrukčně vzdálenost bodu E od roviny AFH. (Konstrukční řešení pouze načrtněte a vysvětlete.)

5. Určete průsečíky přímky KL s tělesem na obrázku v příloze.

Orientace

1. Definujte pojmy aritmetická a geometrická posloupnost.

2. Do jednoho obrázku načrtněte grafy funkcí $y = x^{\frac{1}{4}}$, $y = x^{-4}$.

3. Najděte všechna řešení rovnice $\cos x = \frac{1}{2}$

4. Délky stran obdélníka se zvětší v poměru tři ku dvěma. V jakém poměru se zvětší poloměr kružnice obdélníku opsané?

5. Načrtněte funkci f: y=f(x), která má následující vlastnosti:
$D(f) = (-\infty;-2) \cup (-2;1) \cup (1;\infty)$ a platí $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x\to-2^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-2^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) = 0$

třída 4.B
školní rok 2005/2006

26. Metrické vlastnosti v rovině

1. Je dán čtverec *ABCD* o straně a = 5 cm, ze středů stran jsou opsány půlkružnice s poloměrem $\frac{a}{2}$. Vypočtěte obsah plochy obrazce, jež omezují. (Části kruhu a jejich plošné obsahy.)

2. V rovnoramenném trojúhelníku ABC: $|AB| = 4$ j, $|AC| = |BC| = 6$ j jsou sestrojeny kružnice, jejichž středy jsou po řadě *A, B, C* a navzájem se dotýkají vně. Vypočtěte obsah plochy mezi nimi ležící.

3. Vypočtěte tíhu plechové desky tvaru pravidelného šestiúhelníka o straně 4 dm, v níž je vyříznut kruhový otvor o průměru 4 dm, má-li 1 dm^2 plechu tíhu 2 N.

4. Je dán pravoúhlý trojúhelník *ABC* s pravým úhlem při vrcholu *C*. Polokružnice nad odvěsnami *AC, BC* ležící v polorovinách opačných k polorovinám *ACB* a *BCA* vytvoří spolu s polokružnicí nad průměrem *AB* a procházející bodem *C* dva měsíčky. Vypočtěte jejich obsahy.

5. Určete v pravidelném pětiúhelníku kolikrát je menší obsah pětiúhelníku, který vznikne *z* průsečíků úhlopříček, než obsah původního pětiúhelníku.

6. Kružnici *k(S,r)* je vepsán rovnostranný trojúhelník. Dokažte, že pro libovolný bod kružnice platí: Největší se vzdáleností bodu od vrcholů trojúhelníku je rovna součtu vzdáleností bodu od zbývajících vrcholů.

Otázky

1. Určete obsah mezikruží určeného kružnicí vepsanou a kružnicí opsanou danému trojúhelníku o stranách a, *b, c*.
2. Rozdělte kruh dvěma soustřednými kružnicemi na tři části o stejném obsahu.
3. Vyjádřete obvod a obsah pravidelného n-úhelníku pomocí *n* a poloměru kružnice mu vepsané.
4. Dokažte graficky vztah, který platí *mezí* geometrickým a aritmetickým průměrem Čísel a, b (i pomocí lichoběžníku).

Orientace

1. Definujte pojem velikost (modul) komplexního čísla.
2. Načrtněte graf funkce $y = \arcsin x$
3. Odvoďte metodu per partés a vysvětlete, k čemu slouží.
4. Je dána posloupnost {-5,-2,1,4,…}. Určete její typ a základní charakteristiky.
5. Napište bez záporných a lomených exponentů výraz $5 \cdot x^{\frac{-3}{5}}$, určete jeho definiční obor

třída 4.B
školní rok 2005/2006

27. Metrické vlastnosti v prostoru

1. Nakloníme-li nádobu tvaru polokoule, která byla zcela naplněná vodou, o 30°, vyteče z ní 11 l vody. Určete poloměr koule, ze které nádoba vznikla.
2. Kulová plocha je rozdělena dvěma rovnoběžnými rovinami na tři díly o stejném obsahu. Jakou částí objemu koule je objem příslušné kulové vrstvy?
3. Vypočtěte objem komolého rotačního kužele o straně 10 cm, která svírá s podstavou úhel 60°; úhlopříčky osového řezu jsou na sebe kolmé.
4. Vypočtěte objem a povrch pravidelného komolého čtyřbokého jehlanu, jehož podstavné hrany mají délku $8\sqrt{3}$ cm a $6\sqrt{3}$ cm a odchylka boční stěny od podstavy je 60°. Vypočtěte také odchylku boční hrany komolého jehlanu od podstavy.
5. Určete objem a povrch komolého rotačního kužele, jehož podstavy jsou kruh opsaný a kruh vepsaný protilehlým stěnám krychle s hranou délky a.
6. Kouli je opsán rotační kužel, jehož výška se rovná šestinásobku poloměru R koule. V jakém poměru jsou povrchy obou těles?
7. Do nádoby tvaru rovnostranného válce výšky 40 cm, která je po okraj naplněná vodou, ponoříme míč o poloměru 25 cm. Kolik vody z nádoby po vnoření míče vyteče? Do jaké výšky bude sahat hladina vody po vyjmutí míče z nádoby?
8. Částečně naplněný barel tvaru rotačního válce výšky 1 m plave na vodě tak, že jeho osa je rovnoběžná s vodní hladinou. Délka tětivy, kterou na podstavě barelu vyznačuje povrch vodní hladiny, je 40 cm. Výška kruhové úseče podstavy vyčnívající nad hladinu je 10 cm. Vypočítejte objem barelu.

Otázky

1. Odvoďte vztah pro výpočet objemu koule (pomocí integrálního počtu).
2. Velikosti hran kvádru jsou tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Součet délek všech jeho hran je 96 cm. Povrch kvádru je 334 cm^2. Určete objem kvádru.
3. Určete odchylku tělesových úhlopříček krychle.
a) Zvolte vhodně soustavu souřadnic a užijte analytické geometrie.
b) Použijte stereometrickou metodu.
4. Koule o poloměru 8 j je osvětlena z bodu, jehož vzdálenost od středu koule je 40 j. Určete obsah osvětlené části koule.

Orientace

1. Definujte pojem výrok. Které základní složené výroky znáte?
2. Načrtněte graf funkce $y = |x^2 + 3x|$
3. Určete definiční obor funkce $y = log_2(x^2 - 4x - 12)$
4. Jaký úhel spolu svírají vektory $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$, $\vec{b} = (-\sqrt{3}, 1)$? Proč?
5. Napište komplexní číslo $z = 2 - 2i$ v goniometrickém tvaru.

třída 4.B
školní rok 2005/2006

28. Základy vektorové algebry

1. Zjistěte, zda body A[3;7], B[5;-1], C[-3;5] tvoří trojúhelník. Pak vypočtěte průsečík výšky na stranu a s úsečkou BC, pokud existuje. (Vysvětlete pojmy vektor, kolmost, úhel vektorů.)
2. Jsou dány body A[-1;0], B[1;6], C[2;-3], D[-4;5]. Zjistěte, zda polopřímka CD protíná úsečku AB a určete souřadnice průsečíku, pokud existuje. (Vysvětlete pojmy součet vektorů, rovnoběžnost vektorů.)
3. V rovnoběžníku ABCD, kde A[-1;-2], B[2;-3], C[3;2], stanovte souřadnice vrcholu D a délku úhlopříčky BD. (Vysvětlete pojem kolmost vektorů.)
4. Na ciferníku hodin je bod *A* obrazem čísla 1, bod *B* obrazem čísla 8, bod *C* obrazem čísla 3 a *D* obrazem čísla 10. Dokažte (oběma způsoby), že přímky *AB* a *CD* jsou navzájem kolmé.
5. Bodem A[6, -3,9] a vektorem a(2,1,3) je určena přímka p. Najděte Q $\in$ p tak, aby p bylo kolmé na přímku QP, kde P[1, -3,3].
6. V ΔABC je $\overrightarrow{AB} = (2,6,-4)$, $\overrightarrow{AC} = (4,2,-2)$. Vypočítejte souřadnice
a) vektorů, které splývají s těžnicemi,
b) těžiště, je-li A[0,0,0],
c) obsah ΔABC .

Otázky

1. Definujte skalární a vektorový součin vektorů a uveďte jejich vlastnosti.
2. Rozhodněte, zda vektor $\vec{w} = (7;-1;4)$ je lineární kombinací vektorů $\vec{u} = (1;3;-1)$, $\vec{v} = (4;2;1)$.
3. Dokažte, že body A[0;2;6], B[2;-1;4], C[1;-4;3] určují rovinu a určete její normálový vektor.
4. Určete velikost vnitřního úhlu α trojúhelníku ABC, A[2;-1;3], B[1;1;1], C[0;0;5].
5. Vypočtěte objem rovnoběžnostěnu, jehož hrany tvoří vektory $\vec{u} = (-3;-2;0)$, $\vec{v} = (1;4;6)$, $\vec{w} = (2;-4;5)$.
6. Jak určíte souřadnice těžiště trojúhelníku. Dokažte jednoduchý postup.

Orientace

1. Definujte pojem inverzní funkce
2. Do jednoho obrázku načrtněte grafy funkcí $y = e^x$, $y = \ln x$.
3. Řešte nerovnici $|x+2| \geq 3$ v oboru reálných čísel.
4. Řešte v N rovnici $(x!)^2 + 2x! = 48$
5. Sestrojte úsečku o délce $\sqrt{5}$

třída 4.B
školní rok 2005/2006

29. Analytická geometrie lineárních útvarů

1. Určete rovnici přímky, jež prochází bodem $A[-2;-3]$ a od přímky $x+2y+6=0$ má odchylku 45°.

2. Určete průsečnici rovin τ , σ , pro které platí:

$$\tau: \; x = 3 + 4t + p, \quad y = -6t, \quad z = -2 + 2t + p, \; t, p \in R$$

$$\sigma: \; x = 3 + 2r - 2s, \quad y = -3 + s, \quad z = -2 + r + s, \; r, s \in R$$

3. Určete patu kolmice vedené z bodu H[2;3;5] k přímce

$$p: \; x = 1 + t, \quad y = -3 - 3t, \quad z = 2 - 2t, \; t \in R$$

a určete vzdálenost paty P od bodu H.

4. Určete rovnici roviny, která prochází body A[2;3;5], B[1;7;10] a je kolmá k rovině $\rho: 3x - y + 2z - 5 = 0$.

5. V trojúhelníku *ABC* jsou dány strany b: $x+3y+3=0$, c: $x-3y-3=0$ a pata výšky na stranu a $P[-1;3]$. Nalezněte rovnici strany a.

6. Bodem $A[4;5]$ veďte přímku, která je rovnoběžná s přímkou BC, $B[1; -3]$, $C[-2;1]$.

7. Jsou dány body A[2;3;0], B[4;3;0], C[4;1;0], D[3;2;4].
a) Napište parametrické rovnice přímky AD.
b) Napište obecnou rovnici roviny ACD.
c) Určete objem čtyřstěnu ABCD.
d) Určete velikost výšky čtyřstěnu ABCD na stěnu ACD.

8. V kartézské soustavě souřadnic je umístěn pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV tak, že A[2;3;0], B[4;3;0], C[4;1;0], D[2;1;0], V[3;2;4].
a) Napište parametrické rovnice přímky AV.
b) Napište obecnou rovnici roviny ADV.
c) Určete vzdálenost středu S podstavné hrany BC od přímky AV.
d) Určete vzdálenost středu S od roviny ADV.

třída 4.B
školní rok 2005/2006

Otázky

1. Určete vzájemnou polohu rovin ρ: $3x - y - 7z + 11 = 0$ a σ: $2x - 8y - z + 12 = 0$. Jsou-li rovnoběžné, určete jejich vzdálenost; jsou-li různoběžné, určete jejich odchylku a průsečnici.
2. Určete vzájemnou polohu přímek AB a CD, je-li A[2;-4;5], B[0;-10;7], C[3;-1;4], D[1;-2;4]. Jak byste určili obecnou rovnici roviny určené těmito dvěma přímkami?
3. Určete hodnotu směrnice k přímky p: $y = kx + 5$ tak, aby přímka p měla od bodu P[0;0] vzdálenost $d = \sqrt{5}$.
4. Zvolte libovolnou rovinu, která není rovnoběžná se žádnou souřadnicovou osou a napište rovnici přímky, která je s touto rovinou různoběžná.

Orientace

1. Nadefinujte pojem n faktoriál
2. Načrtněte graf funkce $y = arctg\, x$
3. Napište bez záporných a lomených exponentů výraz $\frac{1}{3}.(x+y)^{-\frac{1}{2}}$
4. Je dáno komplexní číslo z. Nakreslete do Gaussovy roviny číslo z'=iz.
5. Zderivujte funkci $y = \sqrt[5]{x}.\cos x$

30. Analytická geometrie kvadratických útvarů

1. Načrtněte graf elipsy $16x^2+25y^2-64x-150y-111=0$. Dále určete všechny přímky, které procházejí bodem Q[5;0] a mají s elipsou $4x^2+9y^2=36$ jeden společný bod.

2. Načrtněte elipsu $4x^2+9y^2-24x+18y+9=0$ a v jejích průsečících s osou *x* určete tečny.

3. Určete všechny přímky, které procházejí bodem $Q[3;1]$ a mají s hyperbolou $x^2-9y^2=1$ právě jeden společný bod.

4. Rozhodněte, zda rovnice $x^2-12y-4x-40=0$ je rovnicí paraboly. Pokud ano, určete tečnu této paraboly, která je kolmá k přímce $2x-3y+10=0$.

5. Je dána parabola $y^2=12x$ a přímka *p*: $x-y+5=0$.

a)dokažte, že přímka *p* nemá s parabolou žádný společný bod.

b)určete souřadnice bodu, který leží na parabole a od přímky *p* má nejmenší vzdálenost.

6. Určete kuželosečku, jejíž rovnice je $x^2-16y-2x-31=0$, načrtněte ji a napište rovnici její tečny kolmé na přímku *p*: $x+2y-20=0$.

7. Určete rovnici kružnice, která prochází bodem A[1;2], dotýká se osy *y* a má střed na přímce *p*: $y+x=4$.

8. Načrtněte kuželosečku, jejíž rovnice je $y^2=6x$ a určete rovnici její tečny, která svírá s kladnou poloosou *x* úhel 120°.

Otázky

1. Napište rovnici kružnice *k*, která prochází body Q[3;5] a R[2;6] a má střed na přímce o rovnici $2x+3y-4=0$.

2. Vyšetřete množinu všech bodů v rovině, jejichž souřadnice vyhovují rovnici

$$y=2-\frac{1}{3}\sqrt{7-6x-x^2}.$$

3. Určete druh kuželosečky a její parametry, má-li rovnici

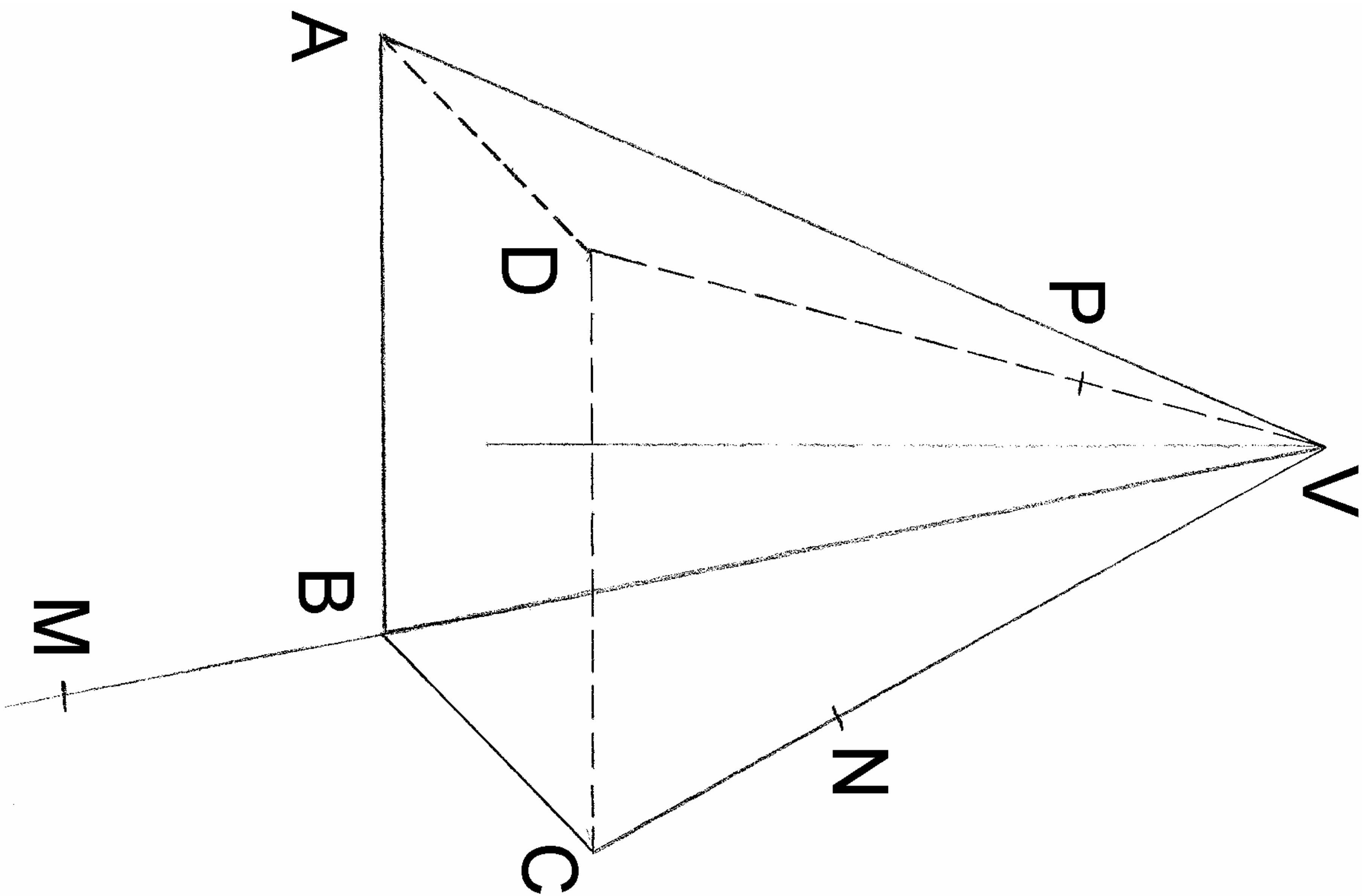
$$9x^2-16y^2-54x+64y-127=0.$$

4. Je dána kuželosečka $x^2+2y^2-4x+8y=0$. Určete rovnici její tečny a normály v jejím bodě T[0; $y_0<0$].

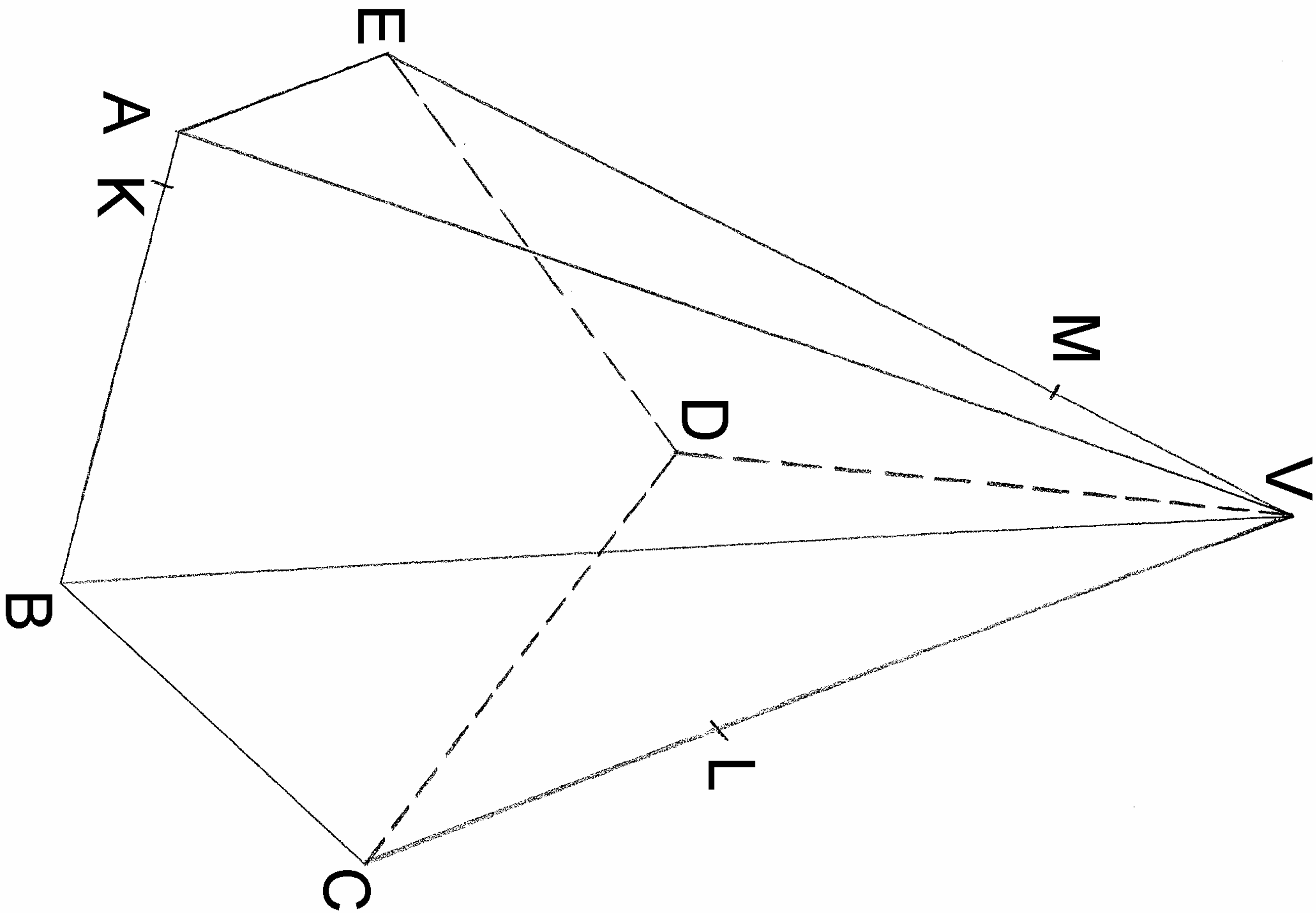
Orientace

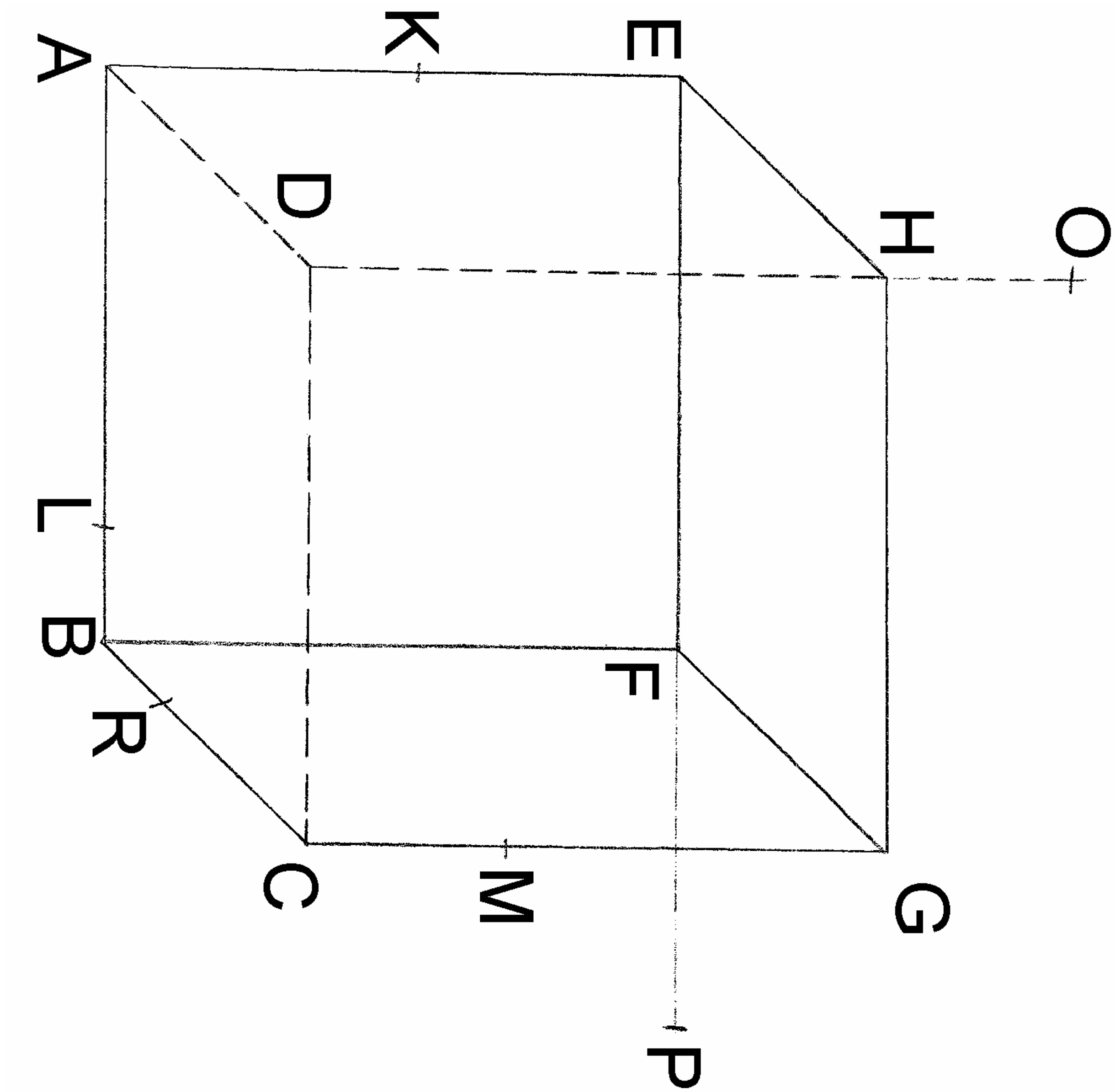
1. Definujte pojmy prvočíslo a složené číslo.
2. Do jednoho obrázku načrtněte grafy funkcí $y=\cos x$, $y=2\cos 2x$.
3. Zjednodušte výraz $\binom{x-1}{x-3}$ a určete, pro která x má tato úprava smysl.
4. Určete definiční obor funkce $y=\ln\left(4-x^2\right)$
5. Sestrojte geometricky úsečku $x=\sqrt{3}$

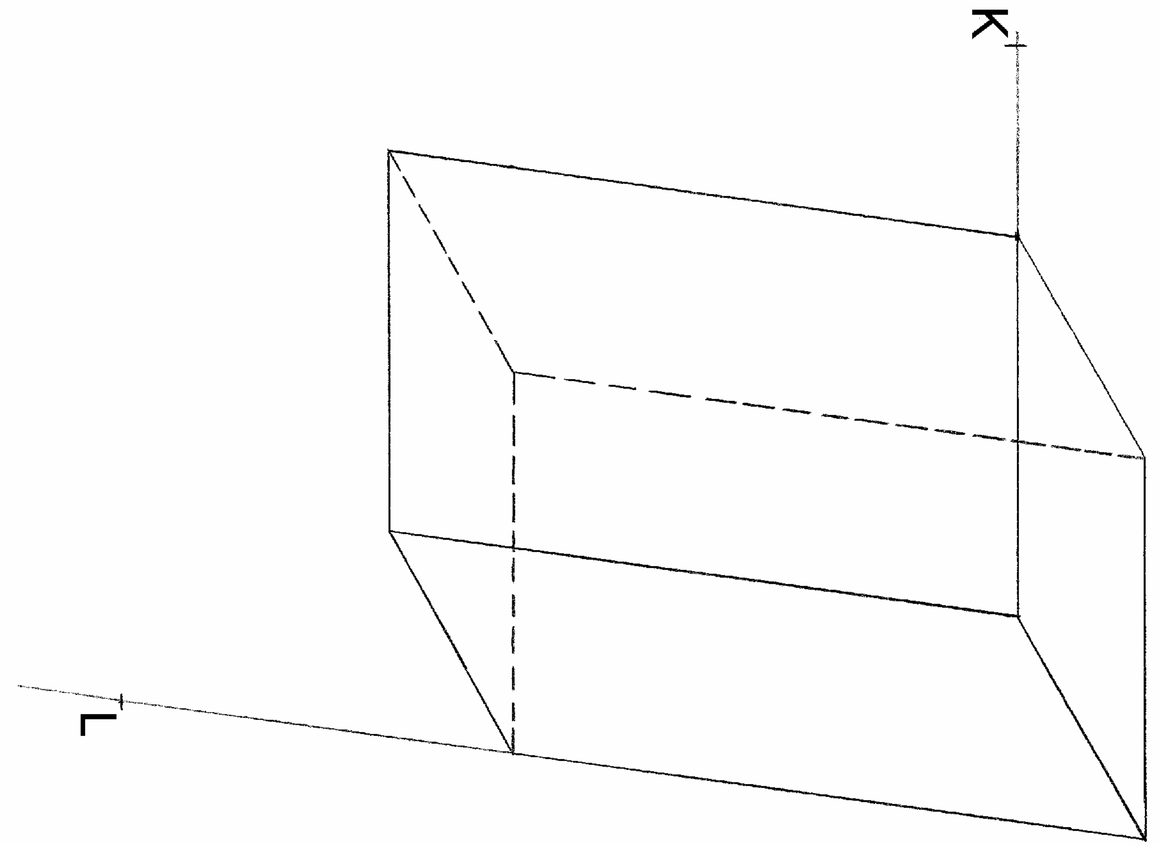
třída 4.B
školní rok 2005/2006



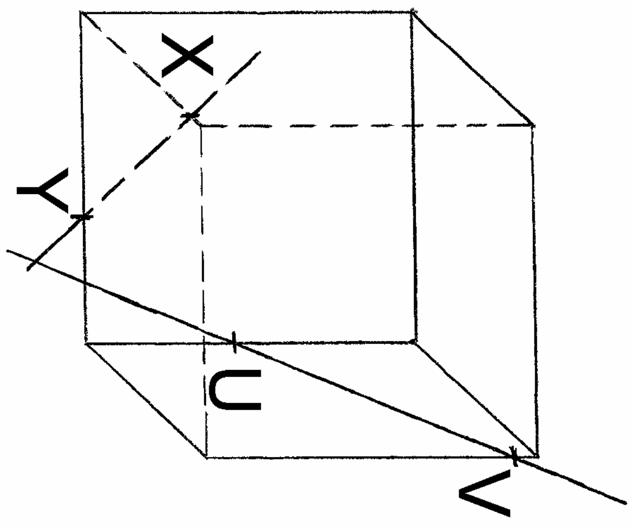
třída 4.B
školní rok 2005/2006

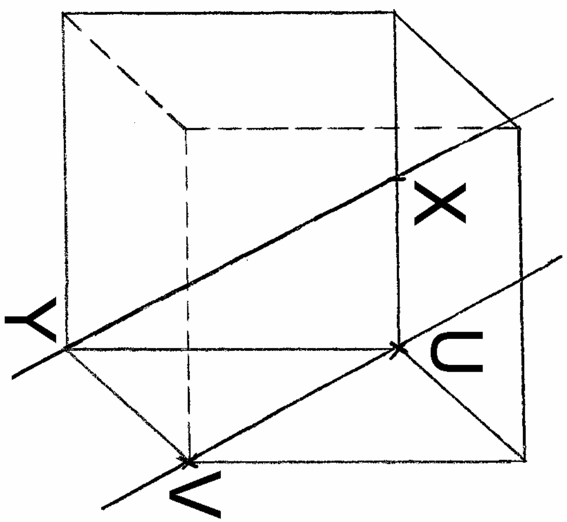

E
A
K
M
D
V
B
L
C


A
K
E
D
H
O
L
B
F
R
C
M
G
P



třída 4.B
školní rok 2005/2006


X
Y
U
V


X
Y
U
V